数学Ⅱ（１）　第2回

１．複素数の計算　（１通目　Ｐ７問2，問3，問4）

２．負の数の平方根　（２通目　Ｐ１問5，問6）

３．解の公式と判別式　（ ２通目　Ｐ２問8，Ｐ３問９ ）

４．解と係数の関係　（ ２通目　Ｐ３問１１，Ｐ４問１２ ）

５．２次式の因数分解　（ ２通目　Ｐ４問１３ ）

６．２解を用いた２次方程式（ ２通目　Ｐ５問１４ ）

７．剰余の定理と因数定理　（ ２通目　Ｐ７問４ ）

１．複素数の計算　　　　　　（１通目　Ｐ７問２，問３，問４）

問２

次の計算をしなさい．

(1) $(4+5i)+(3-2i)=$　　(2) $(2-4i)-(1-i)=$

(3) $(2+3i)(1-5i)=$

【説明】　複素数

(1) 虚数単位 i

$\boxed{2}$ 乗すると $\boxed{-1}$ になる数を i で表し，**虚数単位**という．

(2) 複素数 i

$a,\ b$ を実数として，$\boxed{a+bi}$ の形に表される数を**複素数**という．

a をこの複素数の $\boxed{\text{実}}$ 部，b を $\boxed{\text{虚}}$ 部という．

(3) 実数と複素数

複素数 $a+bi$ は $b=0$ のときは実数 a であり，$b\neq 0$ のとき $\boxed{\text{虚}}$ **数**という．

１．複素数の計算　　　　　　　　（１通目　Ｐ７問２，問３，問４）

問２

次の計算をしなさい．

(1) $(4+5i)+(3-2i)=$　　(2) $(2-4i)-(1-i)=$

(3) $(2+3i)(1-5i)=$

【説明】　**複素数の演算**

実数と同様に，足し算，引き算，掛け算ができる！

足し算　（ア） $(a+bi)+(c+di)=(\boxed{a+c})+(\boxed{b+d})i$

引き算　（イ） $(a+bi)-(c+di)=(\boxed{a-c})+(\boxed{b-d})i$

掛け算　（ウ） $(a+bi)(c+di)=(\boxed{ac-bd})+(\boxed{ad+bc})i$

【解】（２）　$(2-4i)-(1-i)$

$=2-4i-1+i$

$=1-3i$

1．複素数の計算　　　　　　　（１通目　Ｐ７問２，問３，問４）

問３

次の複素数と共役な複素数をいいなさい．

(1) $3+2i$ (　　　　　　)　　(2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}i$ (　　　　　　)

(3) $3i$ (　　　　　　)　　(4) -4 (　　　　　　)

【説明】 共役な複素数

複素数 $\alpha = a+bi$ に対して $\boxed{a-bi}$ を α と**共役な複素数**といい，$\overline{\alpha}$ と表す．

$\alpha = a+bi$ と $\overline{\alpha} = a-bi$ の和と積はともに $\boxed{\text{実数}}$ になる．

【解】（４） 虚部が０なので，　－４

１．複素数の計算　　　　　　（１通目　Ｐ７問２，問３，問４）

問４

次の複素数を $a+bi$ の形に直しなさい．

(1) $\dfrac{2+3i}{1-5i}$　　　　(2) $\dfrac{1-i}{1+i}$

【説明】　複素数の演算　→　実数と同様に，割り算ができる！

割り算　（エ）$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{\boxed{ac+bd}}{c^2+d^2}+\dfrac{\boxed{bc-ad}}{c^2+d^2}i$

ただし，$c+di \neq 0$

$\leftarrow \dfrac{a+bi}{c+di}\times\dfrac{c-di}{c-di}$

【解】（２）

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\\ &= \frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\\ &= \frac{1-2i-1}{1+1}\\ &= \frac{-2i}{2}\\ &= -i\end{aligned}$$

２．負の数の平方根　　　　（２通目　Ｐ１問５，問６）

問５

次の方程式の解をいいなさい．

(1) $x^2 = -3$　　　　(2) $x^2 = -4$

【説明】　負の数の平方根

$a > 0$ のとき，$-a$ の平方根は $\boxed{\sqrt{a}i}$ と $\boxed{-\sqrt{a}i}$

$a > 0$ のとき，$\sqrt{-a} = \boxed{\sqrt{a}i}$　とくに　$\sqrt{-1} = \boxed{i}$

【解】（２）　$x =$ 　$\pm 2i$

２．負の数の平方根　　　　　　　　　　（２通目　Ｐ１問５，問６）

問６

i を用いて，次の計算をしなさい．

(1) $\sqrt{-5}$　　　(2) $\sqrt{-48}$

(3) $-\sqrt{-25}$　　　(4) $\sqrt{-28} \times \sqrt{-35}$

【説明】 負の数の平方根の計算 ➡ ｉに直してから計算する!

【解】（４）　$\sqrt{-28} \times \sqrt{-35}$

$$= 2\sqrt{7}i \times \sqrt{35}i$$

$$= -14\sqrt{5}$$

３．解の公式と判別式　　　（２通目　Ｐ２問８，Ｐ３問９）

問８

解の公式を用いて次の 2 次方程式の解を求めなさい．

(1) $2x^2+6x+7=0$　　　(2) $3x^2-4x+2=0$

【説明】　解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　$x=\dfrac{\boxed{-b}\pm\sqrt{\boxed{b^2-4ac}}}{\boxed{2a}}$

※　x の係数が偶数のとき

$ax^2+2b'x+c=0$ の解は　$x=\dfrac{\boxed{-b'}\pm\sqrt{\boxed{b'^2-ac}}}{\boxed{a}}$

３．解の公式と判別式　　　　（２通目　Ｐ２問８，Ｐ３問９）

問８

解の公式を用いて次の 2 次方程式の解を求めなさい．

(1) $2x^2+6x+7=0$　　　　(2) $3x^2-4x+2=0$

【解】（２）　$3x^2-4x+2=0$

解の公式より　$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times2}}{2\times3}$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16-24}}{6}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{2}i}{6}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$$

【別解】　解の公式より　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\times2}}{3}$

$$=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$$

３．解の公式と判別式　　　（２通目　Ｐ２問８，Ｐ３問９）

問９

次の 2 次方程式の解を判別しなさい．

(1) $2x^2 + 3x + 3 = 0$　　(2) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

(3) $x^2 - 6x - 3 = 0$

【説明】　解の判別

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の**判別式** $\boldsymbol{D} =$ $\boxed{b^2 - 4ac}$ について

(ア) $D > 0 \iff$ 異なる $\boxed{2}$ つの $\boxed{実}$ 数解をもつ．

(イ) $D = 0 \iff$ 1 つの実数解（$\boxed{重}$ 解）をもつ．

(ウ) $D < 0 \iff$ 異なる $\boxed{2}$ つの $\boxed{虚}$ 数解をもつ．

とくに D $\boxed{\geqq 0}$ $\iff$ 実数解をもつ．

(注)　2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ については $\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$ を使ってもよい．

３．解の公式と判別式　　　（２通目　Ｐ２問８，Ｐ３問９）

問９

次の 2 次方程式の解を判別しなさい.

(1) $2x^2+3x+3=0$　　(2) $4x^2-12x+9=0$

(3) $x^2-6x-3=0$

【解】（３）　判別式をDとすると

$$D=(-6)^2-4\times 1\times(-3)$$

$$=48$$

$$>0$$

よって，異なる２つの実数解をもつ。

【別解】　判別式を D／４ とすると

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times(-3)$$

$$=12$$

$$>0$$

よって，異なる２つの実数解をもつ。

４．解と係数の関係　　　　　（２通目　Ｐ３問１１，Ｐ４問１２）

問 11

次の 2 次方程式の 2 つの解を α, β とするとき，次の値を求めなさい．

(1) $3x^2+7x+6=0$　　$\alpha+\beta=$　　　　$,\alpha\beta=$

(2) $2x^2+3x-4=0$　　$\alpha+\beta=$　　　　$,\alpha\beta=$

【説明】　解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とする．

2 次方程式の解と係数の関係

$$\alpha+\beta=-\frac{\boxed{b}}{\boxed{a}},\qquad \alpha\beta=\frac{\boxed{c}}{\boxed{a}}$$

【解】（２）　$2x^2+3x-4=0$

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\qquad \alpha\beta=-\frac{4}{2}=-2$$

４．解と係数の関係　　　　（２通目　Ｐ３問１１，Ｐ４問１２）

問 12

2 次方程式 $x^2 - 4x + 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，
$\alpha^2 + \beta^2$, $\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めなさい．

【説明】 対称式 ➡ 基本対称式（$\alpha + \beta$，$\alpha\beta$）で表してから計算する!

対称式の例①　$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

対称式の例②　$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

【解】　解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{\boxed{-4}}{\boxed{1}} = \boxed{4},\quad \alpha\beta = \frac{\boxed{5}}{\boxed{1}} = \boxed{5}$$ であるから

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \boxed{2\alpha\beta} = \boxed{4}^2 - \boxed{2} \cdot \boxed{5} = \boxed{6}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\boxed{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha\beta} = \frac{\boxed{6}}{\boxed{5}}$$

５．２次式の因数分解　　　（２通目　Ｐ４問１３）

問 13

次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解しなさい．

(1) x^2+2x-1　　　(2) $3x^2-2x+1$

【説明】　2 次式の因数分解

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とする．

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\boxed{\alpha})(x-\boxed{\beta})}$$

【解】（２）

$3x^2-2x+1=0$ の解は $x=\dfrac{\boxed{1}\pm\sqrt{\boxed{2}}\,i}{\boxed{3}}$ であるから

←ｘの係数が偶数
のときの解の公式

$3x^2-2x+1$

$$=\boxed{3}\left(x-\frac{\boxed{1}+\sqrt{\boxed{2}}\,i}{\boxed{3}}\right)\left(x-\frac{\boxed{1}-\sqrt{\boxed{2}}\,i}{\boxed{3}}\right)$$

６．２解を用いた２次方程式（２通目　Ｐ５問１４）

問 14

次の値を解とする 2 次方程式を一つ求めなさい.

(1) $2+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}$　　　(2) $2+i,\ 2-i$

【説明】　与えられた 2 数を解とする 2 次方程式

2 数 α, β を解とする 2 次方程式のひとつは

$$x^2-(\boxed{\alpha+\beta})x+\boxed{\alpha\beta}=0$$

【解】（１）$2+\sqrt{5},\ 2-\sqrt{5}$

解の和：　$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5}) = \underline{4}$

解の積：　$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = \underline{4 - 5} = \underline{-1}$

であるから，$\underline{x^2-4x-1=0}$ である.

７．剰余の定理と因数定理　（２通目　Ｐ７問４）

問４

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 6x + a$ が $x + 2$ で割りきれるように，定数 a の値を求めなさい．

【説明】　剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x - \alpha$ で割ったときの余り R は　$R = \boxed{P(\alpha)}$

因数定理　→　余りが０の定理

整式 $P(x)$ が $x - \alpha$ を因数にもつ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{P(\alpha) = 0}$

【解】　$P(x)$ が $x + 2$ で割り切れるのは　因数定理より

$P(-2) = 0$　のときである。

よって，　$P(-2) = -24 + 16 + 12 + a = 0$　より

$a = -4$