数学Ⅱ（１）　第３回

１．高次方程式　（３通目　Ｐ２問９）

２．恒等式　（３通目　Ｐ３問１）

３．等式の証明１　（ ３通目　Ｐ４問２）

４．等式の証明２　（ ３通目　Ｐ５問４）

５．不等式の証明１　（ ３通目　Ｐ６問７）

６．不等式の証明２　（ ３通目　Ｐ７問９）

1．高次方程式　（３通目　Ｐ２問９）

問９

$x=1-i$ が方程式 $x^3+ax^2+bx-2=0$ の解であるとき，実数 a, b の値と他の解を求めなさい..

【方針】 解を方程式に代入すると０になることを利用して，
a，b の値を求める。

【解】 $x=1-i$ が方程式 $x^3+ax^2+bx-2=0$ の解であるから

$$(1-i)^3+a(1-i)^2+b(1-i)-2=0$$

$(1-i)^3$
$=1+3\cdot 1^2\cdot(-i)+3\cdot 1\cdot(-i)^2+(-i)^3$
$=1-3i-3+i$
$=-2-2i$

実部と虚部に整理すると

$$\boxed{b-4}^{(ア)}-(\boxed{2a+b+2}^{(イ)})i=0$$

$b-4$ =0

$2a+b+2$ =0

$(1-i)^2$
$=1+2\cdot 1\cdot(-i)+(-i)^2$
$=1-2i-1$
$=-2i$

$\boxed{ア}$ と $\boxed{イ}$ は実数であるから

これを解いて　$a=\boxed{-3}$, $b=\boxed{4}$ $\cdots$ $\boxed{答}$

1．高次方程式　　　　　　　　（３通目　Ｐ２問９）

問９

$x = 1 - i$ が方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$ の解であるとき，実数 a, b の値と他の解を求めなさい．.

【解の続き】

このとき，方程式は　$x^3 - \boxed{3}x^2 + \boxed{4}x - 2 = 0$　となる．

<u>左辺</u>を因数分解すると

$P(x)$　　　$P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0 \longrightarrow$　$x - 1$　を因数にもつ

$$\left(x - \boxed{1}^{(ウ)}\right)\left(x^2 - \boxed{2}^{(エ)}x + \boxed{2}^{(オ)}\right) = 0$$

$x - \boxed{1}^{(ウ)} = 0$

より　$x = \boxed{1}$

$x^2 - \boxed{2}^{(エ)}x + \boxed{2}^{(オ)} = 0$

より　$x = \boxed{1} \pm \boxed{i}$

よって，他の解は $x = \boxed{1}, \boxed{1 + i} \cdots \boxed{答}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x + 2 \\
\hline
x - 1 & x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\
 & x^3 - x^2 \\
\hline
 & -2x^2 + 4x \\
 & -2x^2 + 2x \\
\hline
 & 2x - 2 \\
 & 2x - 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

１．高次方程式　　　　　　　　　　　　（３通目　Ｐ２問９）

問９

$x=1-i$ が方程式 $x^3+ax^2+bx-2=0$ の解であるとき，実数 a, b の値と他の解を求めなさい..

【別解（穴埋め式でない場合）】

$x=1-i$ は $x^3+ax^2+bx-2=0$ の解であり，

また $(x-1)^2=(-i)^2$ より $x^2-2x+2=0$ を満たすので，

他の実数解を α とすると $x^3+ax^2+bx-2=0$ は

$(x-\alpha)(x^2-2x+2)=0$ となる。

したがって，定数項を比較すると $-2\alpha=-2$ より $\alpha=1$

よって， $x^3+ax^2+bx-2=0$ の他の実数解は $x=1, 1+i$

また， x^2, x の各項を比較すると $a=-3$， $b=4$

２．恒等式　　　　　　　　　　（３通目　Ｐ３問１）

問 1

次の等式 が x についての恒等式になるように，定数 a, b, c の値を求めなさい．

(1) $x^2+1=ax^2+bx+c$

(2) $x^2-3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$

【説明】　恒等式

文字にどのような数字を代入しても常に成り立つ等式を $\boxed{\text{恒等式}}$ という．

ある等式が恒等式になるように，係数を決定する方法として次のようなものがある．

(1)　**係数比較法**　　両辺を整理したとき，同じ次数の項の係数は等しい

→【解】の方法

(2)　**数値代入法**　　具体的な数値を代入したとき，等式が成り立つ．

→【別解】の方法

【解】　（２）　$x^2-3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$

右辺を展開して整理すると，この等式は

２．恒等式　　　　　　　　　　　　　（３通目　Ｐ３問１）

問１

次の等式 が x についての恒等式になるように，定数 a, b, c の値を求めなさい．

(1) $x^2 + 1 = ax^2 + bx + c$

(2) $x^2 - 3 = a\underline{(x-1)(x+1)} + b(x-1) + c$

$(x-1)(x+1) \quad = x^2 - 1$

【解の続き】（２）

$$x^2 - 3 = \boxed{a}x^2 + \boxed{b}x + \left(\boxed{-a-b+c}\right)$$ となる．

この両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$\boxed{a} = 1 \quad \cdots ①$

$\boxed{b} = 0 \quad \cdots ②$

$\boxed{-a-b+c} = -3 \quad \cdots ③$

①，②，③を連立して a, b, c, を求めると

$a = \boxed{1}$, $b = \boxed{0}$, $c = \boxed{-2}$ $\cdots$ 答

2．恒等式　　　　　　　　　　（３通目　Ｐ３問１）

問 1

次の等式 が x についての恒等式になるように，定数 a, b, c の値を求めなさい．

(1) $x^2+1=ax^2+bx+c$

(2) $x^2-3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$

【別解（穴埋め式でない場合）】

（２）　$x^2-3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$

$x^2-3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$ 　は

x についての恒等式であるから　$x=\pm 1, 0$　でも成り立つ。

よって，$x=1$ 　のとき　$1-3=c$ より　$c=-2$

$x=-1$ のとき　$1-3=-2b+c$　より　$b=0$

$x=0$ 　のとき　$0-3=-a-b+c$　より　$a=1$

逆に　$a=1, b=0, c=-2$　のとき　←　十分性の確認

明らかに　x　についての恒等式であるので，求めた a, b, c の値は適している。

３．等式の証明１　　　　　　　　（３通目　Ｐ４問２）

問２

次の等式を証明しなさい．

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

【説明】　等式の証明

(1) 等式の証明

『等式を証明する』とはその等式が恒等式であることを示すことである．

『等式 $A=B$ を証明する』には，次のいずれかを行う．

(ア) $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に変形する，または $\boxed{B}$ を $\boxed{A}$ に変形する．

(イ) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をそれぞれ $\boxed{\text{同じ式}}$ C に変形する．

(ウ) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boxed{0}$ を示す．

３．等式の証明１　　　　　　　　　　　　（３通目　Ｐ４問２）

問２

次の等式を証明しなさい．

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

【解】　左辺 $= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$

$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

右辺 $= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

ゆえに　$\underline{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

→　２つの２乗の和＝２つの２乗の和の積

→　複素数の絶対値の性質　$|\bar{\alpha}\beta|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2$　から得られる。

ただし，　$\alpha = a + bi$,　$\beta = c + di$　とする。

4．等式の証明２　　　　　　　　　　　　（３通目　Ｐ５問４）

問４

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$ を証明しなさい．

【説明】　等式の証明

(2) 条件つき等式の証明

ある条件のもとで常に成り立つ等式の証明は

(ア) 条件より $\boxed{\text{文字}}$ を減らして，左辺と右辺が等しいことを示す．

(イ) 条件が比の形や比例式で与えられている場合は，比の値を k とおいて利用する．

【解】　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$（ k は実数）とおく。　すると $a=bk,\ c=dk$ と表せる。

ポイント

左辺 $=\dfrac{2bk+3dk}{2b+3d}=\dfrac{k(2b+3d)}{2b+3d}=k$

右辺 $=\dfrac{2bk-3dk}{2b-3d}=\dfrac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k$

よって，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ のとき　$\dfrac{2a+3c}{2b+3d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

5．不等式の証明１　（３通目　Ｐ６問７）

問７

不等式 $x^2 + y^2 \geqq xy$ を証明しなさい．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい．

【説明】　不等式の証明

(1) 不等式の証明

$\boldsymbol{A > B}$ は，$A - B$ を計算して $\boldsymbol{A - B}$ $\boxed{> 0}$ を示す．

$\boldsymbol{A \geqq B}$ は，$A - B$ を計算して $\boldsymbol{A - B}$ $\boxed{\geqq 0}$ を示す．

等式が成り立つ場合も調べる．

具体的な示し方は

(ア) 因数分解して，条件を利用する．

(イ) 2 次式は平方完成して $(\textbf{実数})^2 \geqq \boxed{0}$ を利用する．

実数 a に対して　$\boldsymbol{a^2 \geqq} \boxed{0}$　とくに　$\boldsymbol{a^2 = 0 \Longleftrightarrow a =} \boxed{0}$

５．不等式の証明１　　　　　　　　（３通目　Ｐ６問７）

問７

不等式 $x^2 + y^2 \geqq xy$ を証明しなさい．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい．

【解】　左辺ー右辺　$= x^2 + y^2 - xy$

←ｘについて平方完成

$$= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

$$\geqq 0$$

よって，　$x^2 + y^2 \geqq xy$

また，等号が成り立つのは　$x - \frac{1}{2}y = 0$　かつ　$y = 0$　のとき

すなわち，　$x = y = 0$　のときである。

５．不等式の証明１　　　　　　　　　　　（３通目　Ｐ６問７）

問 7

不等式 $x^2 + y^2 \geqq xy$ を証明しなさい．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい．

【別解】　左辺ー右辺

$$= x^2 + y^2 - xy$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x - y)^2$$

$$\geqq 0$$

よって，　$x^2 + y^2 \geqq xy$

また，等号が成り立つのは　$x^2 + y^2 = 0$　かつ　$x - y = 0$　のとき

すなわち，　$x = y = 0$　のときである。

６．不等式の証明２　　　　　　　　（３通目　Ｐ７問９）

問９

$a>0,\ b>0$ のとき，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$ を証明しなさい．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい．

【説明】　不等式の証明

(3) **相加平均と相乗平均の関係**

$a>0,\ b>0$ のとき　$\boxed{\dfrac{a+b}{2}}\ \boxed{\geqq}\ \boxed{\sqrt{ab}}$

相加平均　　相乗平均

等号が成り立つのは $\boxed{a=b}$ のとき

【解】　$a>0, b>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

また，等号が成り立つのは　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$　のとき

すなわち，$a>0, b>0$ より　$a=b$　のときである。

６．不等式の証明２　　（３通目　Ｐ７問９）

問９

$a > 0, b > 0$ のとき，$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} \geqq 2$ を証明しなさい．また，等号が成り立つのはどのようなときか答えなさい．

【別解】　$a > 0, b > 0$　より

左辺ー右辺　$= \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} - 2$

$$= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$\geqq 0$$

よって，$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} \geqq 2$

また，等号が成り立つのは　$a - b = 0$　のとき

すなわち，$a = b$　のときである。