数学Ⅱ（１）　第５回

１．円の方程式	（５通目　Ｐ１問１，問３）
２．円と直線の共有点１	（５通目　Ｐ３問５）
３．円と直線の共有点２	（５通目　問６，Ｐ４問７）
４．円の接線の方程式	（５通目　Ｐ４問８）
５．２つの円の位置関係	（５通目　Ｐ６問１０）
６．軌跡	（５通目　Ｐ６問１，Ｐ７問２）

１．円の方程式　　　　　　　　　（５通目　Ｐ１問１，問３）

問 1

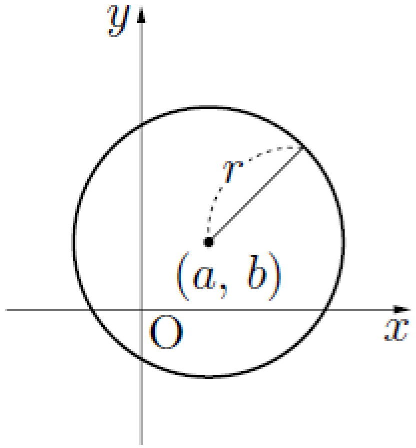
次のような円の方程式を求めなさい.

(1) 中心が点 $(4,\ 2)$，半径が 3　　(2) 中心が原点，半径が 2

【説明】　円の方程式

(1) 点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は

$$(\boxed{x-a})^2+(\boxed{y-b})^2=\boxed{r}^2$$



(2) とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$\boxed{x}^2+\boxed{y}^2=\boxed{r}^2$$

【解】（２）　中心が原点，半径が２であるから，

求める円の方程式は　　$x^2+y^2=4$

１．円の方程式　　　　　　　　　（５通目　Ｐ１問１，問３）

問３

方程式 $x^2+y^2-2x+6y-15=0$ の表す図形を答えなさい．

【方針】　ｘとｙの２次式で表される図形の方程式

→ 平方完成して，図形の方程式を求める

ｃｆ　ｘとｙの１次式で表される図形の方程式

→ 直線の方程式

【解】　左辺を　x　と　y　それぞれについて平方完成してから変形すると

$$(x-1)^2-1^2+(y+3)^2-3^2-15=0$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2=25$$

よって，与えられた方程式は　中心が $(1,-3)$ ，半径が 5

の円を表す。

2．円と直線の共有点１　　　　　　　　（５通目　Ｐ３問5）

問 **5**

円 $x^2+y^2=10\cdots$ ① と次の直線の共有点の座標を求めなさい．

(1) $y=2x-5\cdots$ ②　　　　　(2) $y=3x+10\cdots$ ③

【説明】　円と直線の共有点の座標

→円と直線の方程式を連立して，実数解を求める

【解】　（２）　円　$x^2+y^2=10\ \cdots$ ① と直線　$y=3x+10\ \cdots$ ③ の

共有点の座標は，　連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=10 & \cdots ① \\ y=3x+10 & \cdots ③ \end{cases}$

の実数解である。

① に ③ を代入すると　$x^2+(3x+10)^2=10$

変形すると　$x^2+6x+9=0$　より　$(x+3)^2=0$

よって，これを解くと　$x=-3$

したがって，求める共有点の座標は　$(x,y)=(-3,1)$

3．円と直線の共有点２　　　　　（５通目　問6，Ｐ４問7）

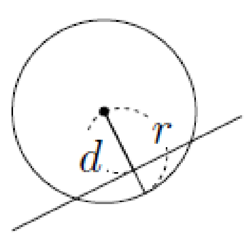
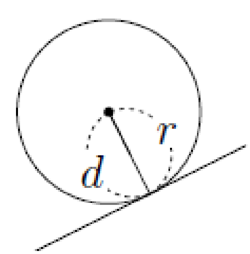
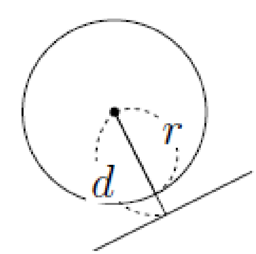
問 6

円 $x^2 + y^2 = 3$ と直線 $y = x - 2$ の共有点の個数を求めなさい．

【説明】　円と直線の共有点の個数

① 円の方程式に直線の方程式を代入して得られた
xの２次方程式の判別式を調べる。　→【解】の方法

② 円の中心と直線間の距離と円の半径の大小を比較する。
→【別解】の方法

円と直線の位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
D の符号	$D \boxed{>} 0$	$D \boxed{=} 0$	$D \boxed{<} 0$
d と r の大小	$d \boxed{<} r$	$d \boxed{=} r$	$d \boxed{>} r$
位置関係			

３．円と直線の共有点２　　　　　　（５通目　問6，Ｐ４問7）

問 **6**

円 $x^2+y^2=3$ と直線 $y=x-2$ の共有点の個数を求めなさい．

【解】
$$\begin{cases} x^2+y^2=3 & \cdots ① \\ y=x-2 & \cdots ② \end{cases}$$

① に ② を代入すると　$x^2+(x-2)^2=3$

変形すると　$2x^2-4x+1=0 \quad \cdots ③$

よって，円 ① と直線 ② の共有点の個数は，方程式 ③ の実数解の個数と同じであるから，　③ の判別式 D の値から個数を判断する。

したがって，$D=\underline{(-4)^2-4\cdot 2\cdot 1}=8>0$　より

求める共有点の個数は ２ 個

$ax^2+bx+c=0$ の判別式 D は
$D=b^2-4ac$

３．円と直線の共有点２　　　　　　（５通目　問6，Ｐ４問7）

問 6

円 $x^2+y^2=3$ と直線 $y=x-2$ の共有点の個数を求めなさい．

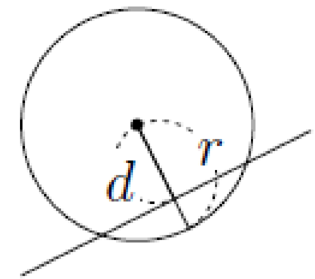
【別解】 円　$x^2+y^2=3$　の中心 $(0,0)$ と直線　$y=x-2$　の距離を

d　とすると，点と直線の距離の公式から　　$\Leftrightarrow\ x-y-2=0$

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

点 (x_1,y_1) と 直線　$ax+by+c=0$

の距離　d　は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



また円　$x^2+y^2=3$　の半径を　r　とすると

$r=\sqrt{3}$

したがって，　$d<r$　より円は直線と２点で

交わるので，　共有点の個数は２個

３．円と直線の共有点２　　　　　　（５通目　問6，Ｐ４問7）

問 7

直線 $y = 2x + n$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するように定数 n の値を定めなさい.

【解】

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \cdots ① \\ y = 2x + n & \cdots ② \end{cases}$$

① に ② を代入すると　$x^2 + (2x + n)^2 = 1$

変形すると　$5x^2 + 4nx + n^2 - 1 = 0$　$\cdots$ ③

よって，直線 ② が円 ① に接するのは，方程式 ③ の判別式を D とすると　$D = 0$　になるときである。

したがって，　$D = (4n)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (n^2 - 1)$

$= -4n^2 + 20$　より

$-4n^2 + 20 = 0$　を解いて　$n = \pm\sqrt{5}$

３．円と直線の共有点２　　　　　（５通目　問6，Ｐ４問7）

問 7

直線 $y = 2x + n$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するように定数 n の値を定めなさい.

【別解】　直線 $\underline{y = 2x + n}$ が 円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するのは,

$\Leftrightarrow \quad 2x - y + n = 0$

円の中心 $(0,0)$ と直線の距離 d が $d = 1$ となるときである。

よって，点と直線の距離の公式から

$$d = \frac{|n|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 1$$

これを解いて，　$n = \pm\sqrt{5}$

４．円の接線の方程式　（５通目　Ｐ４問８）

問 **8**

次の円上の点 P における接線の方程式を求めなさい．

(1) 円 $x^2+y^2=5$，点 P(2, 1)　(2) 円 $x^2+y^2=25$，点 P(4, −3)

【説明】　円の接線

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (x_1, y_1) 上における接線の方程式は

$$\boxed{x_1x+y_1y} = r^2$$

【解】　（２）

$$4x-3y=25$$

5．２つの円の位置関係　　　（５通目　Ｐ６問１０）

問 10

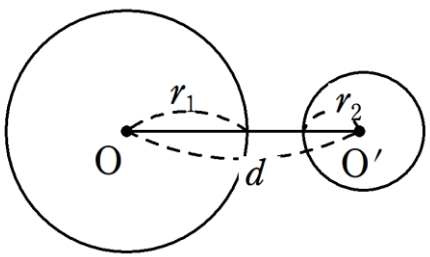
２つの円 $x^2+y^2-4x-8y+4=0$ と $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ の位置関係を調べなさい．

【説明】　２つの円の位置関係

大きな円に小さな円を右から近づけると，
中心間の距離 d は次の５つの場合に分類される

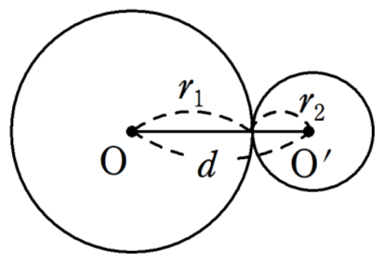
重要

① 互いに外部



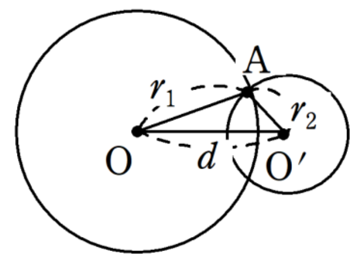
$d>r_1+r_2$

② 外接



$d=r_1+r_2$

③ ２点で交わる



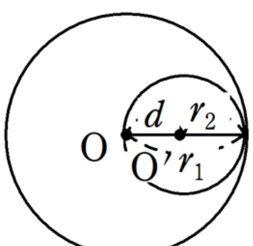
$r_1-r_2<d<r_1+r_2$

三角不等式

↑

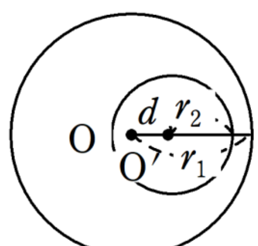
△OO’A
ができるため

④ 内接



$d=r_1-r_2$

⑤ 大きな円が小さな円を含む



$d<r_1-r_2$

５．２つの円の位置関係　　　（５通目　Ｐ６問１０）

問 10

2 つの円 $x^2+y^2-4x-8y+4=0$ と $x^2+y^2+6x-2y+6=0$ の位置関係を調べなさい．

$(x-2)^2-2^2+(y-4)^2-4^2+4=0$　　$(x+3)^2-3^2+(y-1)^2-1^2+6=0$

【解】 2 つの円の方程式を変形すると

$$\left(x-\boxed{2}\right)^2+\left(y-\boxed{4}\right)^2=\boxed{16},\ \left(x+\boxed{3}\right)^2+\left(y-\boxed{1}\right)^2=\boxed{4}$$

となり，それぞれ，中心が $\left(\boxed{2},\boxed{4}\right)$ で半径が $\underbrace{\boxed{4}}_{r_1}$ の円，

中心が $\left(\boxed{-3},\boxed{1}\right)$ で半径が $\underbrace{\boxed{2}}_{r_2}$ の円である．

2 つの円の中心間の距離は

$$\sqrt{\left(\boxed{2}+\boxed{3}\right)^2+\left(\boxed{4}-\boxed{1}\right)^2}=\underbrace{\sqrt{\boxed{34}}}_{d}$$ であり，

$$\underbrace{\boxed{4-2}}_{r_1-r_2} < \underbrace{\sqrt{\boxed{34}}}_{d} < \underbrace{\boxed{4+2}}_{r_1+r_2}$$ が成り立つので，

← 三角不等式が成立

2 つの円は ２点で交わる

６．軌跡　　　　　　　　　　（５通目　Ｐ６問１，Ｐ７問２）

問１

2 点 A(0, 3)，B(2, 1) から等距離にある点の軌跡を求めなさい．

【説明】　軌跡の方程式

(1) 軌跡の方程式

与えられた条件を満たす点全体の集合を，その条件を満たす点の

軌跡 という．

(2) 点 P の軌跡は次の手順で求める．

(ア) 軌跡を求める点 P の座標を (x, y) とおく．

(イ) 与えられた条件から，x と y の関係式を導く．

６．軌跡　　　　　　　　　　　　（５通目　Ｐ６問１，Ｐ７問２）

問１

2 点 A(0, 3), B(2, 1) から等距離にある点の軌跡を求めなさい.

【解】　条件を満たす点 P の座標を (x, y) とする.

AP＝BP　より両辺を２乗すると　$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$

よって，　$x^2 + (y-3)^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

変形すると　$x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$

より　　$x - y + 1 = 0$

したがって，求める軌跡は　直線　$y = x + 1$

［注意］　①「軌跡を求めなさい」という問題については、
一般に，軌跡の方程式だけでなく，「図形名」も答える。

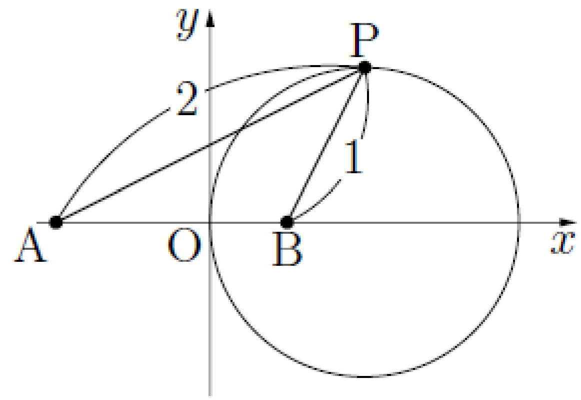
②　軌跡の方程式から「条件」が満たされることが
明らかでない場合，「十分性」の証明が必要。

→　今回の場合，式変形を逆にたどるとただちに　$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$
がわかり，　$\mathrm{AP} \geqq 0$，$\mathrm{BP} \geqq 0$　より　AP＝BP　が導かれる
ので，教科書に合わせて「十分性」の証明は省略した。

６．軌跡　　　　　　　　　　　　　（５通目　Ｐ６問１，Ｐ７問２）

問２

$\mathrm{A}(-4,\ 0)$ からの距離と $\mathrm{B}(2,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めなさい．



【解】　点 P の座標を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする．

$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=2:1$ から　　$\boxed{2}\ \mathrm{BP}=\mathrm{AP}$

両辺を 2 乗すると　　$\boxed{4}\ \mathrm{BP}^2=\mathrm{AP}^2\cdots$①

また　$\mathrm{BP}^2=\left(x-\boxed{2}\right)^2+y^2$　　$\mathrm{AP}^2=\left(x+\boxed{4}\right)^2+y^2$

これらを①に代入すると

$$\boxed{4}\left\{\left(x-\boxed{2}\right)^2+y^2\right\}=\left(x+\boxed{4}\right)^2+y^2$$

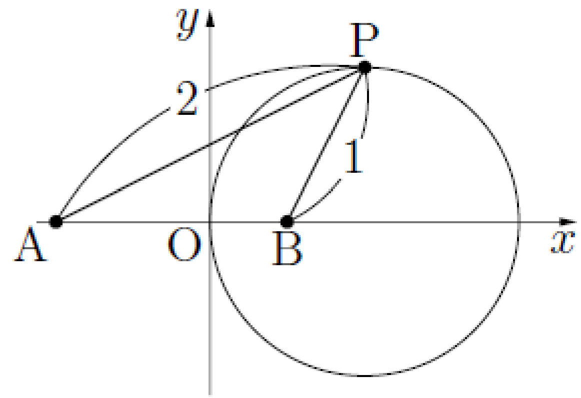
$\longrightarrow$　$4(x^2-4x+4+y^2)=x^2+8x+16+y^2$

$3x^2+3y^2-24x=0$

６．軌跡　　　　　　　　　　　（５通目　Ｐ６問１，Ｐ７問２）

問２

$A(-4,\ 0)$ からの距離と $B(2,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 P の軌跡を求めなさい．



【解の続き】

整理すると　$x^2+y^2-\boxed{\ 8\ }x=0$ 　→ $(x-4)^2-4^2+y^2=0$

すなわち　$\left(x-\boxed{\ 4\ }\right)^2+y^2=\boxed{16}$

点 P の軌跡は，中心が $(4,0)$ ，半径が４の円である。…答

［注意］　問１と同様に，「十分性」は明らかであるので，証明は教科書に合わせて省略した。